

# Sur le solveur en corrélation d'images éléments finis

Jean-Charles Passieux, Robin Bouclier

▶ **To cite this version:**

Jean-Charles Passieux, Robin Bouclier. Sur le solveur en corrélation d'images éléments finis. 24ème Congrès Français de Mécanique - CFM 2019, Aug 2019, Brest, France. pp.1450-1457. hal-02291251

**HAL Id: hal-02291251**

**https://hal.insa-toulouse.fr/hal-02291251**

Submitted on 18 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur le solveur en corrélation d'images éléments finis

**J.C. PASSIEUX[a] et R. BOUCLIER[a,b]**

a. Institut Clément Ader, Université de Toulouse, CNRS/INSA/UT3/Mines Albi/ISAE
b. Institut de Mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse, CNRS/UT1/UT2/UT3/INSA
{passieux, bouclier}@insa-toulouse.fr

## Résumé :

*Le volume de données d'imagerie numérique obtenu pour chaque essai mécanique connait une augmentation fulgurante. La question de développer des algorithmes d'analyses numériquement efficace est donc centrale. Les algorithmes efficaces en Corrélation d'Images Numériques (CIN) sont ceux basés sur un opérateur constant. En ce qui concerne la méthode CIN basées sur les éléments finis (CIN-EF), l'idée consiste à remplacer le gradient de l'image déformée par celui de l'image de référence pour obtenir cette propriété. Dans certains cas, cette approximation est incorrecte et conduit à la divergence de l'algorithme même si celui-ci est initialisé tout proche de la solution. Nous présentons ici une analyse mathématique de cet l'algorithme afin de tenter de dessiner les contours de son véritable domaine de validité. Ensuite, une alternative numériquement efficace et inconditionnellement convergente est proposée en s'inspirant de l'algorithme de Gauss-Newton par composition inverse (GNCI).*

## Abstract :

*The amount of digital imaging data obtained for each mechanical test is increasing dramatically. Developing numerically efficient analysis algorithms is definitely a burning issue. The effective algorithms in Digital Image Correlation (DIC) are those based on a constant operator. According to the finite element-based DIC (FE-DIC) method, the idea is to approximate the gradient of the deformed state image with that of the reference image to obtain this property. In some cases, this approximation is incorrect and leads to the divergence of the algorithm even if it is initialized very close to the solution. Here, a mathematical analysis of this algorithm is presented in order to try to draw the contours of its true domain of validity. Then, a numerically efficient and unconditionally convergent alternative is proposed, inspired by the inverse composition Gauss-Newton algorithm (ICGN).*

**Mots clefs :** Corrélation d'Images Numériques, CIN globale, Inverse Compositional Gauss-Newton

## Introduction

La mécanique expérimentale connaît une véritable révolution depuis vingt ans, grâce à l'utilisation de nombreuses modalités d'imagerie. Ces nouveaux outils offrent la possibilité de mesurer des champs mécaniques qui pourraient redéfinir les procédures standard de caractérisation mécanique utilisées quotidiennement dans l'industrie et réduire ainsi considérablement le temps de conception des structures. Compte tenu de l'augmentation de la définition des capteurs et de leur diversité, le volume des données

générées lors d'un essai mécanique augmente, ce qui implique de développer des algorithmes d'analyse d'images de plus en plus efficaces [6, 5, 7, 8, 9]. En mécanique expérimentale, la corrélation d'images (CIN) est devenue l'une des méthodes de mesure en champ les plus couramment utilisées, en raison de sa (relative) simplicité de mise en œuvre et de sa modularité. Parmi les variantes de la corrélation d'images numériques, celle basée sur les éléments finis (CIN-EF) apparaît comme un candidat intéressant dans la quête actuelle de favoriser un lien étroit entre calculs et essais.

Les façons d'implémenter efficacement la corrélation d'images numériques (CIN) reposent sur des algorithmes itératifs à opérateurs linéaires constants. Une idée tout à fait pertinente utilisée depuis de nombreuses années dans l'implémentation classique du solveur de CIN-EF consiste à remplacer le gradient de l'image dans l'état déformé par celui de l'image de référence, de manière à obtenir un opérateur constant. Différents arguments (petites déformations, petites rotations, égalité des deux gradients proches de la solution...) ont été avancés dans la littérature pour justifier cette approximation, sans qu'aucun d'eux ne soit tout à fait complet. En effet, la convergence de l'algorithme d'optimisation doit être étudiée en fonction de sa capacité à produire des directions de descente. Par le prisme de cette propriété importante, on tente d'expliquer pourquoi l'approximation classique mentionnée plus haut, fonctionne et quel est son véritable domaine de validité.

Ensuite, une implémentation de la CIN-EF basée sur l'algorithme de Gauss-Newton par Composition Inverse (GNCI) est proposée comme une alternative numériquement efficace et mathématiquement robuste.

# Un problème de moindres carrés non-linéaire

En s'appuyant sur l'hypothèse de conservation des niveaux de gris, le problème de corrélation d'images numériques consiste à déterminer la transformation $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ inconnue à partir de la connaissance des images $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ avant et après que l'éprouvette observée ait subi cette transformation. Plus précisément, et compte tenu de la présence de différentes sources de bruit, on cherche à minimiser le résidu associé $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g} \circ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{1}$$

où $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont des vecteurs [1] contenant la valeur en niveau de gris de chaque image en chaque point d'intégration $\mathbf{x}$. En approche basée sur les éléments finis, la transformation cinématique inconnue est recherchée sous la forme :

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x} + \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{2}$$

avec $\mathbf{u}$ le vecteur des degrés de libertés éléments finis et $\mathbf{N}$ la matrice qui collecte les valeurs de chaque fonction de forme en chaque point d'intégration.

Ainsi formalisé, le problème de corrélation d'images numériques est écrit sous forme du problème de moindres carrés non-linéaire suivant :

$$\mathbf{u}^\star = \underset{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n}{\arg\min}\ j(\mathbf{u}), \qquad \text{avec} \qquad j(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{u})^T\mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{3}$$

1. les lettres majuscules en gras désignent des matrices, celles minuscules en gras des vecteurs et celles minuscules normales des scalaires.

# Algorithmes de descente

Ce genre de problème est classiquement résolu par un algorithme de descente qui, partant d'une estimation initiale $\mathbf{u}^{(0)}$, génère une série de solutions $\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + s^{(k)}\mathbf{d}^{(k)}. \tag{4}$$

$\mathbf{d}^{(k)}$ est appelée la direction et $s^{(k)} > 0$ le pas. Pour minimiser la fonctionnelle $j$, $\mathbf{d}^{(k)}$ doit être une direction de descente, c'est à dire, satisfaire la propriété :

$$\boldsymbol{\nabla} j\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)^T \mathbf{d}^{(k)} < 0, \tag{5}$$

avec $\boldsymbol{\nabla} j\left(\mathbf{u}^{(k)}\right)$ le gradient de la fonctionnelle $j$, qui compte tenu de la structure moindre carré de $j$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\nabla} j\left(\mathbf{u}^{(k)}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u}^{(k)})\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u}^{(k)}), \tag{6}$$

avec $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u}^{(k)})$ le gradient de l'image déformée $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ évaluée au point $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(k)})$.

Les différentes méthodes d'optimisation se distinguent par leur façon de construire la direction $\mathbf{d}$ (exposant $(k)$ omis pour la clarté) :

— **Méthode du gradient** :

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

Ce choix de direction est explicite, elle ne nécessite pas d'inverser un système. Elle vérifie toujours la condition de descente (5) et à ce titre converge de façon inconditionnelle au voisinage de la solution étant donné le choix d'un pas $s$ suffisamment petit. Cette méthode est donc robuste, mais potentiellement lente à converger. Elle n'est généralement pas utilisée en CIN [2].

— **Méthode de Newton** :

$$\mathbf{H}_j\ \mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u}) \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{H}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^T\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{N} - \mathbf{N}^T\mathbf{H}_\mathbf{g}(\mathbf{u})\mathbf{R}(\mathbf{u})\mathbf{N},$$

Ce choix nécessite de résoudre un système linéaire avec pour opérateur la Hessienne $\mathbf{H}_j$ de la fonctionnelle $j$. Cette méthode converge également de façon inconditionnelle au voisinage de la solution et présente de plus une convergence quadratique. Cependant cet opérateur dépend de l'approximation courante de $\mathbf{u}$, il est donc nécessaire de l'assembler et de le factoriser à chaque itération $k$. Enfin, il est à noter que le résidu tendant vers 0 proche de la solution, le deuxième terme de la Hessienne devient rapidement négligeable.

— **Méthode de Gauss-Newton** :

$$\widetilde{\mathbf{H}}_j\ \mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u}) \qquad \text{avec} \qquad \widetilde{\mathbf{H}}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^T\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{N},$$

Cette méthode peut-être vue soit comme une approximation de la méthode de Newton, soit comme une résolution d'un problème de moindres carrés linéaire en linéarisant le résidu $\mathbf{r}(\mathbf{u})$. La condition de descente est également systématiquement satisfaite. Un système doit encore être résolu à chaque itération avec un opérateur non constant, ce qui en fait une méthode qui converge également rapidement, mais avec un coût par itération potentiellement important.

— **Gauss-Newton modifié** (Méthode classique CIN-EF) :

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{H}}}_j\ \mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{F}\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u}) \qquad \text{avec} \qquad \widetilde{\widetilde{\mathbf{H}}}_j(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^T\boldsymbol{\nabla}\mathbf{F}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{F}\mathbf{N},$$

Cette méthode est en réalité un Gauss-Newton modifié qui consiste à approximer le gradient de l'image $\mathbf{g}\circ\boldsymbol{\phi}(\mathbf{u})$ par celui de l'image $\mathbf{f}$, bien que ces deux quantités n'aient aucune raison d'être égales *a priori*, même avec la solution exacte. L'opérateur ne dépend plus de la solution courante, il peut-être assemblé et factorisé une seule fois, ce qui en fait une méthode très efficace numériquement. En revanche, cette direction ne vérifie pas systématiquement la condition de descente (5), si bien que la convergence n'est pas assurée et l'algorithme diverge dans certaines situations. Pour justifier cette approximation il est parfois fait référence à l'hypothèse de petites perturbations/déformations dans la littérature. Car en effet, dans ce cas là, ces deux opérateurs sont très proches et l'approximation est licite. En revanche, la réciproque n'est pas vraie et cette condition est beaucoup trop restrictive. On peut montrer [9] que la condition pour que cette méthode satisfasse la condition de descente (5) est liée à la positivité du gradient de la transformation $\mathbf{F} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{U})^T$. Cette condition est beaucoup plus permissive et, comme nous le montrons dans les exemples, le cas de grandes déformations n'est pas limitant de ce point de vue. Le cas cas typique qui conduit à la non-positivité de $\mathbf{F}$ est celui des grandes rotations, comme nous le verrons dans les exemples.

— **Alternative 1 : quasi-Gauss Newton** :

$$\widetilde{\widetilde{\mathbf{H}}}_j\ \mathbf{d} = \boldsymbol{\nabla}\mathbf{G}(\mathbf{u})\ \mathbf{N}\ \mathbf{r}(\mathbf{u})$$

Une première alternative consiste à utiliser l'approximation des gradients pour l'opérateur, mais pas pour le second membre. Dans ce cas, la direction vérifie inconditionnellement la propriété de descente (5). Cette méthode nécessite cependant de recalculer une interpolation de l'image $\mathbf{g}$, qui fait que le coût de calcul reste significativement plus important que l'approche précédente. Mais c'est cependant une approche à considérer car elle n'implique qu'une modification mineure du code.

— **Alternative 2 : Gauss Newton par composition inverse**. L'idée sous-jacente de GNCI [1, 5] est plutôt de modifier la fonctionnelle à chaque itération en changeant d'inconnue. Plus précisément, le déplacement $\mathbf{u}^{(k)}$ connu, il suffit de trouver la correction $-\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}$ qui transporte l'image $f$ vers l'image $\mathbf{g}(\mathbf{x}+\mathbf{u}^{(k)})$ elle-même transportée par l'approximation courante de la solution $\mathbf{u}^{(k)}$ :

$$\widetilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x},\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}) = \mathbf{f}\circ\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},-\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}) - \mathbf{g}\circ\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},\mathbf{u}^{(k)}) \tag{7}$$

Ainsi on obtient le même système linéaire et donc la même direction qu'avec l'algorithme de Gauss-Newton modifié. Une étape de mise à jour du déplacement courant est ensuite introduite qui consiste à déterminer le déplacement $\mathbf{u}^{(k+1)}$ connaissant $\mathbf{u}^{(k)}$ et $\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}$. Il s'agit d'une composition de la transformation courante par l'inverse de l'incrément de transformation :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\circ\underbrace{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},\mathbf{u}^{(k)})\circ\boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x},-\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)})}_{\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x},\mathbf{u}^{(k+1)})}. \tag{8}$$

L'implémentation pour la méthode CIN-EF est un peu moins directe qu'en approche locale. Nous

proposons l'approximation suivante :

$$\mathbf{u}^{(k+1)} \leftarrow \underbrace{\mathbf{u}^{(k)} + \widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}}_{\text{màj classique}} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^{(k)}\mathbf{N}\,\widetilde{\mathbf{d}}^{(k)}}_{\text{nouveau terme correctif}}$$

où $\boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^{(k)}$ est un matrice diagonale qui contient le gradient du déplacement $\mathbf{u}^{(k)}$ aux noeuds du maillage. En pratique, il peut-être calculé par projection au sens des moindres carrés [9]. Bien que le système linéaire à résoudre soit identique à celui de Gauss-Newton modifié, la condition de descente est toujours assurée.

# Illustrations numériques

Dans cette partie, nous allons illustrer les résultats de la partie précédente sur deux cas tests emblématiques. Le premier cas correspond à une rotation de solide rigide pour des angles variants de 0 à 180°. Le deuxième un cas de grandes déformations hétérogènes de type punch.

Le premier cas est repris de l'article [4], pour plus de détails, voir [9]. Sur la figure 1(haut), on peut voir que toutes les méthodes convergent inconditionnellement sauf le Gauss-Newton modifié pour des angles supérieurs à 45° environ. Pourtant basé sur le même système linéaire à chaque itération, GNCI converge sans soucis et mêmes pour des angles supérieurs à 90°. Ces résultats sont corroborés par l'étude du signe de $\boldsymbol{\nabla} j^T\mathbf{d}$ sur la figure 1(bas) qui doit être négatif pour satisfaire la condition 5. On peut remarquer que pour des angles supérieurs à 90°, cet algorithme ne peut que diverger. La positivité du gradient de la transformation est étudiée au travers du signe de la valeur propre double de sa partie symétrique. Il s'avère qu'elle devient négative pour des angles supérieurs à 90° également ce qui confirme numériquement les résultats théoriques. Entre 45° et 90°, la méthode Gauss-Newton modifiée satisfait la condition de descente, et donc devrait converger. On peut montrer qu'il existe un pas $\alpha^{(k)}$ suffisamment petit qui fait converger l'algorithme [9], mais au prix d'un nombre d'itérations potentiellement colossal.

Le deuxième cas test étudié est celui du punch. L'idée est de montrer numériquement ici que les grandes déformations ne pose de problème à aucun algorithme. Ce qui met en défaut l'argument de petites perturbations parfois évoqué dans la littérature. Les images de référence et déformées sont présentées sur la figure 2. Le maillage est fait d'éléments finis quadrilatères linéaires. La solution en déformation est représentée sur la figure 3. Elle fait apparaître des niveaux de déformation (jusqu'à 200% de dilatation et 40% de glissement) qui sont clairement en dehors du cadre de petites déformations. La convergence en terme de résidu de corrélation normalisé ou en terme de critère de stagnation du champ solution semblent peu affectés par le choix de la méthode de descente.

# Conclusions

Nous avons proposé une analyse de l'algorithme le plus utilisé en FE-DIC. Nous avons montré qu'il s'agit d'un Gauss-Newton modifié et qu'il ne fourni pas toujours une direction de descente. Plusieurs exemples ont été présentés pour montrer que suivant les cas, la vitesse de convergence peut être (fortement) ralentie, voir ne plus converger du tout. Une condition sur les opérateurs a été établie. La convergence de l'algorithme est également interprétée comme une condition sur le déplacement. Contrairement à ce qui peut-être lu parfois dans la littérature, cette condition est beaucoup plus permissive que le cas de petites déformations ou de petites rotations, puisque nous avons montré que l'algorithme peut converger jusqu'à des angles de 45° et pour des niveaux de déformations très importants (200% dans les exemples).

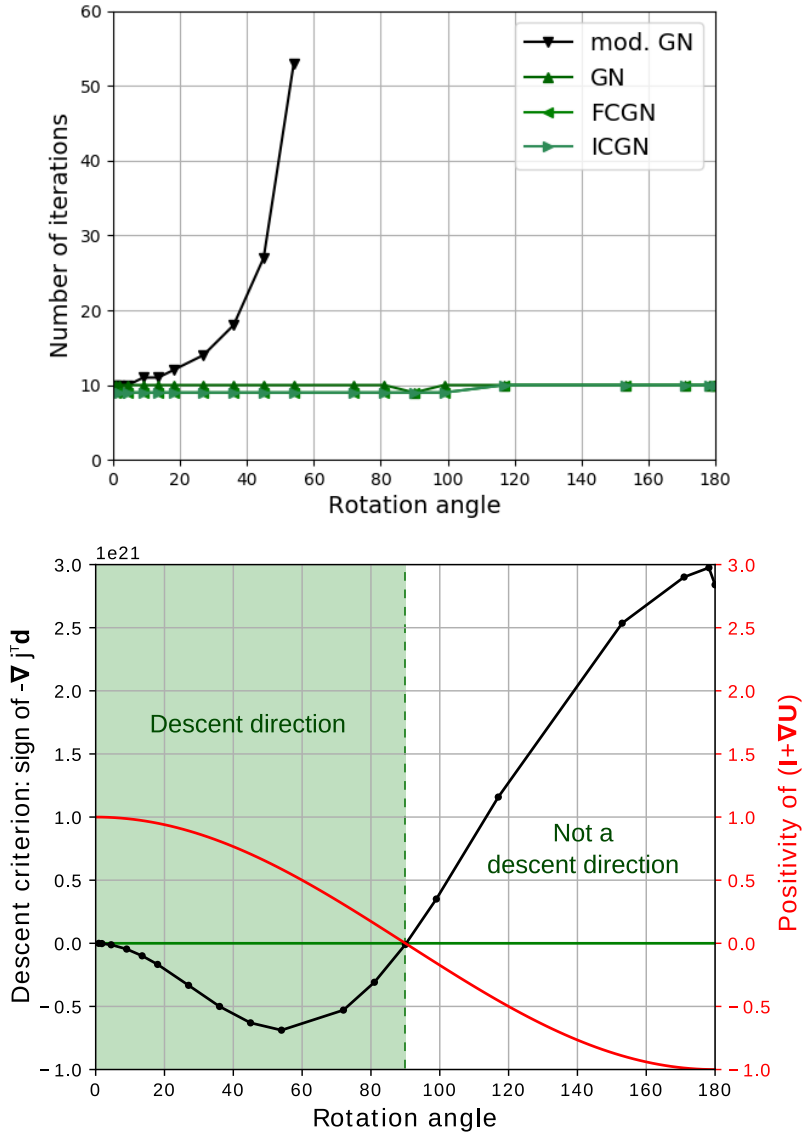



FIGURE 1 – (en haut) nombre d'itérations de GN pour converger en fonction de l'angle de rotation $\theta$ pour différents algorithmes de descente. (en bas) En noir, le signe de $\boldsymbol{\nabla} j^T \mathbf{d}$ en fonction de l'angle. Les valeurs négatives signifie que la direction est bien une direction de descente. En rouge, la valeur propre double de la partie symétrique de $\boldsymbol{F}^{(\infty)} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{U}^{(\infty)})^T$, négative pour des angles plus grands que 90°.

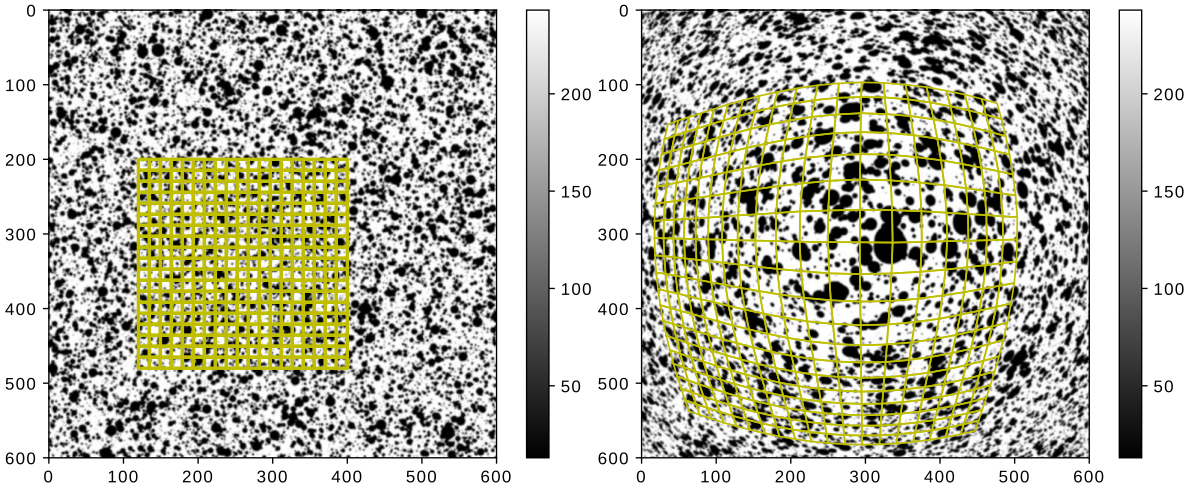



FIGURE 2 – Images de référence (gauche) et déformée (droite) pour le cas test punch avec le maillage élément finis, produites avec BSpeckleRender [10, 3]

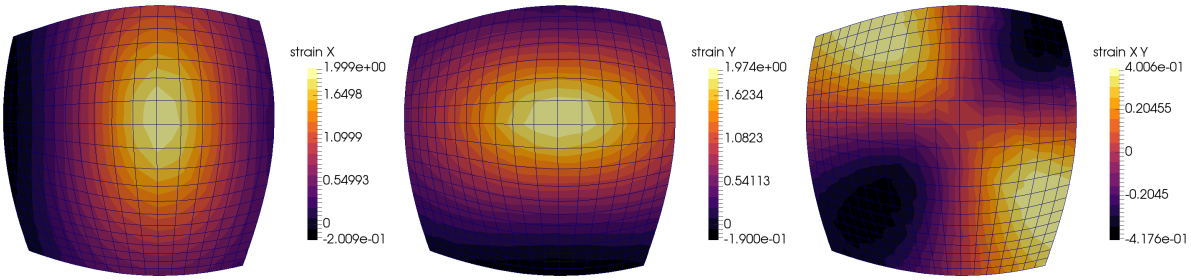



FIGURE 3 – Trois composantes du champ de déformation pour le cas test punch.

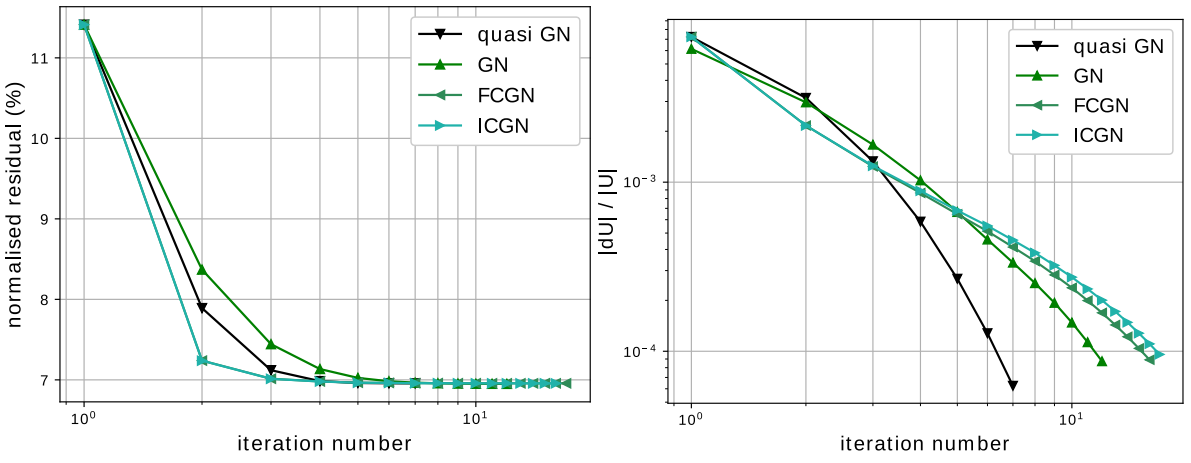



FIGURE 4 – Convergence des différents algorithmes de descente sur le cas test punch.

Lorsque le champ de déplacement est tel que l'algorithme ne peut plus fournir une direction de descente, il faut faire très attention, car même en initialisant bien (même avec la solution exacte si elle existe) l'algorithme diverge ! Dans une telle situation, le Gauss-Newton classique n'est pas le seul à pouvoir atteindre la convergence. Plusieurs alternatives sont proposées, dont certaines basées sur la famille des algorithmes Gauss-Newton par composition. A très peu de frais et en utilisant les mêmes opérateurs (et les mêmes gradients), il est possible d'obtenir un algorithme tout aussi rapide mais avec une convergence garantie. Cela confirme que le gradient n'est pas la source du problème.

# Références

[1] Simon Baker and Iain Matthews. Lucas-Kanade 20 years on : A unifying framework. International Journal of Computer Vision, 56(3) :221–255, (2004).

[2] P. Doumalin. Microextensometrie locale par correlation d'images numeriques application aux etudes micromecaniques par microscopie electronique a balayage. PhD thesis, Ecole Polytechnique, (2000).

[3] K. Genovese and D. Sorgente, A morphing-based scheme for large deformation analysis with stereo-DIC, Optics and Lasers in Engineering, 104, 159-172, (2018)

[4] J. Neggers, B. Blaysat, J. P. M. Hoefnagels, and M. G. D. Geers. On image gradients in digital image correlation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 105 :243–260, (2016).

[5] B. Pan, K. Li, and W. Tong. Fast, robust and accurate digital image correlation calculation without redundant computations. Experimental Mechanics, 53(7) :1277–1289, (2013).

[6] J.-C. Passieux and J.-N. Périé. High resolution digital image correlation using Proper Generalized Decomposition : PGD-DIC. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 92(6) :531–550, (2012).

[7] J.-C. Passieux, J.-N. Périé, and M. Salaün. A dual domain decomposition method for finite element digital image correlation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 102(10) :1670–1682, (2015).

[8] J.-C. Passieux, R. Bouclier and J.-N. Périé. A space-time PGD-DIC algorithm : Application to 3D mode shapes measurements. Experimental Mechanics, 58(7) :1195–1206, 10.1007/s11340-018-0387-2, (2018).

[9] J.C. Passieux and R. Bouclier, Classic and inverse compositional Gauss-Newton in global DIC, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10.1002/nme.6057, (2019).

[10] F. Sur, B. Blaysat, M. Grédiac. Rendering deformed speckle images with a Boolean model. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 60(5)634–650, (2018)